Tarea 1

Probabilidad y combinatoria

23 de enero de 2019

Fecha de entrega: Jueves 8 de febrero de 2019 a las 12:30 horas.

Definiciones y notación

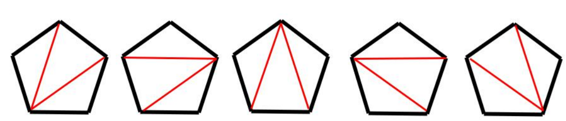
- Denotamos por $[n]$ al conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$.
- El número de Catalan C_n está dado por $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.
- Una partición de n es una sucesión de enteros $(n_1, n_2, \dots)$ que satisface que $n_1 \geq n_2 \geq n_3$ y $\sum_{i=0}^{n} n_i = n$. A menudo se omiten los 0's, por ejemplo, $(4, 3, 3, 1, 1)$ representa la misma partición de 12 que $(4, 3, 3, 1, 1, 0, 0)$ o $(4, 3, 3, 1, 1, 0, 0, 0, \dots)$. A los números $n_i \neq 0$ se les llama partes.
- Para $n \leq m$, decimos que una partición $(n_1, n_2, \dots)$ de n es más chica que una partición $(m_1, m_2, \dots)$ de m si $n_i \leq m_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$

1 Problemas

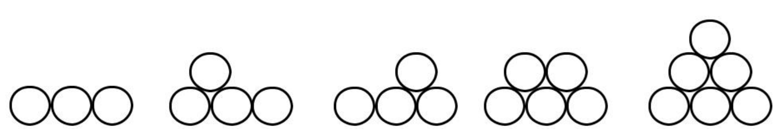
Problema 1 *Problema 1. ¿Cuántos subconjuntos de $[n]$ no contienen 2 enteros consecutivos?.*

Problema 2 *Prueba que los siguientes conjuntos estan contados por los números de Catalan. Una prueba biyectiva es deseable.*

1. Triangulaciones de un polgono convexo de $n + 2$ lados en n triangulos.



2. Formas de acomodar monedas en el plano, con la fila de hasta abajo conteniendo n monedas consecutivas.

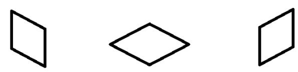


Problema 3 *Prueba la identidad*

$$\sum_{k=0}^{n} C_{2k}C_{2(n-k)} = 4^n C_n.$$

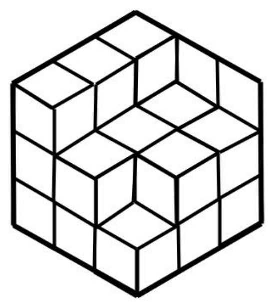
Problema 4 *Prueba que el número de particiones de n con la parte mas grande k es igual al número de particiones de n con exactamente k partes.*

Problema 5 *Un hexágono regular de lados de tamaño n es teselado con $3n^2$ rombos de lado 1. Los rombos están en una de las 3 posiciones siguientes:*



Tipo A Tipo B Tipo C

Un ejemplo para $n = 3$ es el siguiente:



1. Muestra que se necesitan n^2 del tipo A, n^2 del tipo B y n^2 del tipo C.

2. Prueba que el número de teselaciones descritas es igual al número de n-tuplas $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n)$ de particiones, tales que $\lambda_1 \leq \lambda_2 \cdots \leq \lambda_n \leq \lambda$, donde $\lambda = (n, n, ..., n)$.

3. (Bonus) Da (y prueba) una fórmula para el número de teselaciones descritas anteriormente.